4.3 Durchschnitte und Summen

Definition: Die Summe jeder Kollektion von Unterräumen $\{V_i \mid i \in I\}$ von V ist die Teilmenge

$$\sum_{i\in I} V_i \;:=\; \left\{ \sum_{i\in I}{}' v_i \;\middle|\; \begin{array}{l} v_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \\ v_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \end{array} \right\} \subset V.$$

Die Summe endlich vieler Unterräume $V_1, \ldots, V_n$ schreibt man auch so:

$$V_1 + \ldots + V_n \;:=\; \{\, v_1 + \ldots + v_n \mid \forall i = 1, \ldots, n : v_i \in V_i \,\}.$$

Proposition: Die Summe $\sum_{i\in I} V_i$ ist der eindeutige kleinste Unterraum von V, welcher alle V_i enthält. Genauer gilt

$$\boxed{\sum_{i\in I} V_i \;=\; \bigcap_{U} U,}$$

wobei der Durchschnitt über alle Unterräume $U \subset V$ genommen wird, welche alle V_i enthalten.

Beweis: Die Menge dieser U enthält $U = V$. Also ist $\bigcap_U U =: V'$ ein Unterraum.
Für alle $i \in I$ gilt $V_i \subset U$ für alle diese U, also $V_i \subset V'$.
Nach Konstruktion gilt $V' \subset U$ " " " " .
Also ist $V' = \sum_{i\in I} V_i$

qed.

4.4 Erzeugnis, Erzeugendensystem

Definition: Gegeben seien eine Menge I sowie Vektoren $v_i \in V$ für alle $i \in I$. Jeder Ausdruck der Form

$$\boxed{\sum_{i \in I}{}' a_i \cdot v_i}$$

mit $a_i \in K$ für alle $i \in I$, und $a_i = 0$ für fast alle $i \in I$, heisst eine *Linearkombination* der Elemente v_i für $i \in I$. Eine Linearkombination heisst *trivial*, wenn alle Koeffizienten a_i gleich Null sind, andernfalls heisst sie *nicht-trivial*.

Linearkombinationen einer beliebigen Teilmenge $S \subset V$ kann man elegant und sparsam hinschreiben mit der Indexmenge $I := S$ und $v_s := s$ für alle $s \in S$.

Definition: Für jede Teilmenge S eines K-Vektorraums V heisst die Menge

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{s \in S}{}' a_s \cdot s \;\middle|\; \begin{array}{l} a_s \in K \text{ für alle } s \in S, \\ a_s = 0 \text{ für fast alle } s \in S \end{array} \right\} \subset V$$

das *Erzeugnis von S*. Das Erzeugnis endlich vieler Vektoren kürzt man auch ab durch

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle := \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle.$$

Def.: V heisst endlich erzeugt, wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

Proposition: Das Erzeugnis $\langle S \rangle$ ist der eindeutige kleinste Unterraum von V, welcher die Teilmenge S umfasst. Genauer gilt

$$\boxed{\langle S \rangle = \bigcap_{U} U,}$$

wobei der Durchschnitt über alle Unterräume $U \subset V$ genommen wird, welche S umfassen.

Bew.: (a) $0_V = \sum_i 0_K \cdot v_i$;

(b) $\boxed{v = \sum_i{}' a_i v_i}$, $w = \sum_i{}' b_i v_i \in \langle S \rangle$

$\Rightarrow v + w = \sum_i{}' (a_i v_i + b_i v_i) = \sum_i{}' \underbrace{(a_i + b_i)}_{\in K} v_i \in \langle S \rangle$

(c) $\lambda \in K \Rightarrow \lambda v = \sum_i{}' (\lambda a_i) v_i \in \langle S \rangle$.

Also ist $\langle S \rangle$ ein Unterraum.

Für jedes i ist $v_i = \sum_j{}' \delta_{ij} \cdot v_j \in \langle S \rangle$.

Folglich ist $S \subset \langle S \rangle$.

Für jeden Unterraum $U \subset V$ mit $S \subset U$ gilt $\langle S \rangle \subset U$.

Rest analog zu oben. qed.

Beispiel: Das Erzeugnis der leeren Menge ist der Nullraum $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$.

Definition: Eine Teilmenge $S \subset V$ mit $\langle S \rangle = V$ heisst ein *Erzeugendensystem von V*.

Eine Teilmenge S ist also ein Erzeugendensystem von V genau dann, wenn jeder Vektor in V eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S besitzt.

Beispiel: Die Menge V ist ein Erzeugendensystem von V.

4.5 Lineare Unabhängigkeit

Definition: Eine Teilmenge $S \subset V$ heisst *linear abhängig*, wenn Koeffizienten $a_s \in K$ für alle $s \in S$ existieren, so dass $a_s = 0$ ist für fast alle, aber nicht für alle $s \in S$, und

$$\boxed{\sum_{s\in S}{}' a_s \cdot s = 0.}$$

Existieren keine solchen a_s, so heisst S *linear unabhängig.*

Eine Teilmenge S ist also genau dann linear unabhängig, wenn der Nullvektor keine nicht-triviale Darstellung als Linearkombination der Elemente von S besitzt.

Beispiel: Die leere Teilmenge $\varnothing \subset V$ ist immer linear unabhängig.

Proposition: Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) S ist linear unabhängig.

(b) Kein Element von S ist eine Linearkombination der übrigen Elemente von S.

(c) Jeder Vektor in V besitzt höchstens eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (b): Wäre $v \in S$ eine Linkomb. $v = \sum'_{v \neq s \in S} a_s \cdot s$, wäre $\sum'_{s \in S} \begin{cases} a_s & \text{falls } s \neq v \\ \underbrace{-1}_{\neq 0} & \text{falls } s = v \end{cases} \cdot s = 0$.

$\Rightarrow$ Widerspruch zu (a).

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\sum'_{s \in S} a_s s = 0$ mit $a_v \neq 0$ für ein $v \in S$. $\Rightarrow$ $v = \sum'_{v \neq s \in S} -\frac{a_s}{a_v} \cdot s$ $\Rightarrow$ Widerspruch zu (b).

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $v = \sum'_s a_s s = \sum'_s b_s s$. Dann ist $\sum'_s (a_s - b_s) s = 0$. Wegen (a) gilt dann $a_s - b_s = 0$ für alle $s \in S$. $\Rightarrow$ $a_s = b_s$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wende (c) auf $v = 0$ an.

qed.

$a_v \cdot v + \sum_{s \neq v} a_s \cdot s = 0$

$\Rightarrow a_v \cdot v = \sum_{s \neq v} (-a_s) \cdot s$

$0 = -v + \sum'_{s \neq v} a_s s$

4.6 Basis

Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heisst eine *Basis von* V.

Eine Teilmenge S ist also eine Basis von V genau dann, wenn jeder Vektor in V genau eine Darstellung als Linearkombination der Elemente von S besitzt.

Bemerkung: Eine endliche Basis $v_1, \ldots, v_k$ eines Vektorraums V liefert ein *Koordinatensystem auf* V, das heisst, eine Bijektion

$$K^n \xrightarrow{\sim} V, \quad (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k.$$

Satz: Für jede Teilmenge $S \subset V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) S ist eine Basis von V.

(b) S ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

(c) S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

Bew.: (a) $\Rightarrow$ (b) Sei B eine Basis. Sei $S \subset B$ ein weiteres Erzeugendensystem. Zu zeigen: $S = B$.

Für jede $b \in B$ schreibe $b = \sum'_{s \in S} a_s s = \sum'_{s \in B} \begin{Bmatrix} a_s & s \in S \\ 0 & s \notin S \end{Bmatrix} \cdot s$. Wegen $b = \sum'_{s \in B} \delta_{sb} \cdot s$.

Da B lin. unabh. ist, folgt $\begin{Bmatrix} a_s & s \in S \\ 0 & s \notin S \end{Bmatrix} = \delta_{sb}$ für alle $s \in B$. Insbesondere ist $1 = \delta_{bb} = a_b$ und $b \in S$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei S ein min. Erz. Sys. Wäre S lin. abhängig, wäre $v = \sum'_{s \in S'} a_s s$ mit $S' := S \setminus \{v\}$

für ein $v \in S$ und $a_s \in K$. Beh.: S' ist Erz. Sys!

Sei $w \in V$ beliebig. Schreibe $w = \sum'_{s \in S} b_s s = b_v \cdot v + \sum'_{s \in S'} b_s s = b_v \cdot \sum'_{s \in S'} a_s s + \sum'_{s \in S'} b_s s$

$$\Rightarrow \quad w = \sum'_{s \in S'} (b_v a_s + b_s) \cdot s \in \langle S' \rangle. \quad \checkmark$$

(a) $\Rightarrow$ (c) Sei B eine Basis. Sei $B \subset S \subset V$ mit S lin. unabh. Zu zeigen: $S = B$.

Wäre $v \in S \setminus B$, schreibe $v = \sum_{s \in B}' a_s \cdot s$ $\Rightarrow$ S nicht lin. unabhängig.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sei S maximal lin. unabh. Zu zeigen: $\langle S \rangle = V$.

Sei $v \in V$ beliebig. Falls $v \in S$ dann ist $v \in \langle S \rangle$ ✓

Sonst setze $S' := S \cup \{v\}$. Die ist linear abhängig.

D.h.: $0 = \sum_{s \in S'}' a_s s = a_v \cdot v + \sum_{s \in S}' a_s \cdot s$. mit nicht allen $a_s = 0$.

Wäre $a_v = 0$, wäre $\sum_{s \in S}' a_s s = 0$ $\Rightarrow$ S lin. abh. Widerspruch.

Also ist $a_v \neq 0$ $\Rightarrow$ $v = \sum_{s \in S}' \frac{-a_s}{a_v} \cdot s \in \langle S \rangle$ ✓

qed.

Satz: Für jedes Erzeugendensystem E von V und jede linear unabhängige Teilmenge $\boxed{L \subset E}$ existiert eine Basis B von V mit $L \subset B \subset E$.

Beweis später.

Folge: (a) Jedes Erzeugendensystem E von V enthält eine Basis von V.

(b) Jede linear unabhängige Teilmenge L von V lässt sich zu einer Basis von V erweitern.

(c) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(d) Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis.

Bew.: (a) Nimm $L = \emptyset \subset E$ ✓.
(b) Nimm $E = V \supset L$ ✓.
(c) Nimm $L = \emptyset \subset E = V$. ✓
(d) Sei E ein endliches Erz.Sys. Wende (a) an. qed.

Vorsicht: Ein Vektorraum besitzt im allgemeinen viele verschiedene Basen. Bevor man eine spezielle Basis gewählt hat, darf man daher nur mit dem unbestimmten Artikel von „einer Basis“ sprechen.